


Dual et bidual

V un K -ev son dual $V^* = \text{Hom}(V, K)$

$\varphi \in V^*$ si $\varphi: v \in V \longrightarrow \varphi(v) \in K$
+ linéaire $\varphi(\lambda v + v') = \lambda \varphi(v) + \varphi(v')$

$$\dim V^* = \dim V \times 1 \quad (\dim K = 1)$$
$$= \dim V$$

On a que $V \cong V^*$ (à cause de la dimension)

Interet: il fournit des formes lineaires
interessantes: les formes
lineaires coordonnees:

$$V = K^d = \{ (x_1, \dots, x_d) \in K^d \mid x_i \in K \}$$

la fct $(x_1, \dots, x_d) \mapsto x_1 \in K$
est une forme lineaire et donc
un elt de $(K^d)^*$

Ca en donne d'autres

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto x_1 + 2x_2 \in K$$

Cas general: $B \subset V$ une base de V
" $\{e_1, \dots, e_d\}$

$$\forall v \in V \quad v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$$

les $x_1, \dots, x_d$ sont les coord de v ds la base B

$\ell_1: V = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mapsto x_1 \in K$
 est une forme linéaire = une elt de V^* .

V^* admet comme base $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_d^*\}$

V^* est lui-même un EV sur K

On peut considérer $(V^*)^* = \text{Hom}(V^*, K)$
 $(V^*)^* = V^{**}$ bidual.

Question: exemple de formes linéaires sur V^* : des fcts φ qui à $l \in V^*$

associe $\varphi(l) \in K$ et tq

$$\varphi(\lambda l + l') = \lambda \varphi(l) + \varphi(l').$$

Ex: soit $v \in V$ on prend la fct sur V^* qui a $l \longrightarrow l(v) \in K$

par exemple: $(K^d)^*$ et $v = (1, 0, 0, \dots, 0)$

soit $l \in (K^d)^*$

$$l: (x_1, \dots, x_d) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$$

on prend la fct

$$l \longrightarrow l(1, 0, \dots, 0) = \lambda_1 + \lambda_2 0 + \dots + \lambda_d 0$$

On peut prendre $v = (2, -1, 0, \dots, 0) = \lambda_1$

si on prend cet autre v
on obtient la fct

$$l = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d \longrightarrow 2\lambda_1 - \lambda_2 + 0$$

— Ces formes lineaires sont notees

$$\text{eval}_v: l \longrightarrow l(v)$$

"
évaluation au
vecteur v

eval_v est lineaire:

$$\begin{aligned} \text{eval}_v(\lambda l + l') &= \lambda l(v) + l'(v) \\ &= \lambda \text{eval}_v(l) + \text{eval}_v(l') \end{aligned}$$

Toute forme lineaire sur V^* est de la forme eval_v pour un $v \in V$.

- l'application
$$\text{eval} \cdot : V \longrightarrow (V^*)^*$$
$$v \longmapsto \text{eval}_v$$

est un isom d'EV.

Autre exemple d'évaluation:

$$\text{soit } V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: x \rightarrow f(x)\}$$

$$\text{soit } \text{eval}_1: f \rightarrow f(1) \in \mathbb{R}$$

C'est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\text{eval}_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$$

$$\text{si } x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{eval}_{x_0}: f \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Rmq: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contient l'ensemble
des fct linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
les fct de la forme $x \mapsto ax$

l'espace de toutes ces fct linéaires
est $\text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

$$\underset{\substack{\text{"} \\ \mathbb{R}^A}}{= \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \subsetneq \widehat{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

et eval.: $\mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^*)^4$

rend $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{**}$ isomorphes.

ε_{ij} = la (i,j) -ième application linéaire
élémentaire associée à

une base $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ de V et
une base $B' = \{f_1, \dots, f_d\}$ de W .

$$\varepsilon_{ij}(v) := e_j^*(v) \cdot f_i \in W$$

C'est l'application qui à $v \in V$ associe

la j -ième coord de v fois le vecteur f_i
pour tout $v \in V$ $\varepsilon_{ij}(v) \in K f_i$

ε_{ij} a pour image $K f_i$
 $\text{rg}(\varepsilon_{ij}) = 1$ $\text{Ker } \varepsilon_{ij}$ de $\dim \dim V - 1$

$\varepsilon_{ij}(v) = 0_W$ ssi la j -ième coord de
 v est nulle

For example: $\text{Ker}(e_{i,1}) = \{x_2 e_2 + \dots + x_d e_d\}$
 $\subset V$

$$\varepsilon_{ij}(x_j e_j) = x_j f_i$$

$$\varepsilon_{ij}(e_j) = f_i$$

les $\{\varepsilon_{ij}\}$ forme une base de
 $\text{Hom}(V, W)$

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \text{ ex}$$

$$\varphi(x, y, z) = (2x + y, y + 3z)$$

les applications elementaires sont les

$$E_{i,j} \quad i=1,2 \quad j=1,2,3$$

$$E_{2,3}(x, y, z) = z(0, 1) = (0, z)$$

$$\varphi = 2\varepsilon_{11} + 1 \cdot \varepsilon_{12} + 1 \cdot \varepsilon_{22} + 3\varepsilon_{2,3}$$